Mathematik: Die axiomatische Methode

Wissenschaftstheorie SS 2026, Prof. Dr. Morgenstern

Moritz Vogel

June 13, 2026

Einleitung

Warum ist die Mathematik so spannend?

- unanschauliche Untersuchungsgegenstände
- auf den ersten Blick vorbildhafte Präzision der Begriffsbildung und Beweisführung
- zweifelsfreies Gelten der mathematischen Lehrsätze
- Anordnung von Lehrsätzen in Axiomensystemen
- vielseitige Anwendbarkeit der abstrakten Resultate.

Die wissenschaftstheoretische Frage

- Doch ist die Mathematik wirklich so präzise?
- Sind die Begriffe wirklich präzise?
- Sind die Beweismethoden wirklich korrekt?

Beweis als Hauptmerkmal der Mathematik

- Beweise gelten seit der griechischen Antike Hauptmerkmale der Mathematik
- Formale Vereinheitlichung von Beweisen: Axiomensystem

Was ist die axiomatische Methode

Was ist die axiomatische Methode

Definition

Systematisierung einer Theorie durch ein Axiomensystem mit dem Ziel begrifflicher Präzision und expliziter Erfassung von Voraussetzungen.

Historische Wurzeln

Aristoteles

Voraussetzungsarten:

- Definitionen
- allgemeingültige Axiome
- Fachspezifische Grundannahmen („Hypothesen“)

Euklid

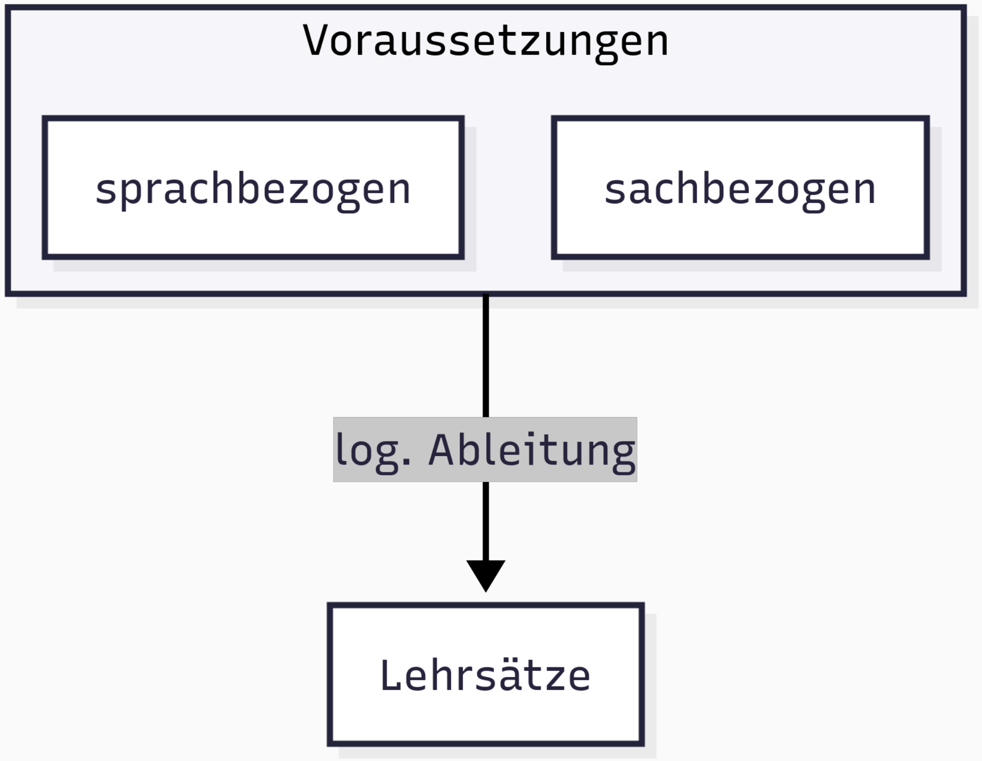
(ca. 300 v. Chr.) Musterbeispiel für AS in „Elementen“

- Definitionen
- bereichsbezogene Postulate
- allgemein anerkannte Axiome
- Lehrsätze mit Beweisen und Konstruktionsaufgaben mit zugehörigen Konstruktionen

Merkmale moderner Axiomensysteme - Struktur

Sätze einer Theorie T sind dann in einer Form eines Axiomensystems wenn sie in einem logisch-deduktiver Zusammenhang stehen:

- Voraussetzungen getrennt von Lehrsätzen
- Voraussetzungen unterteilt in
  - *sprachbezogen*
  - *sachbezogenen*
- Ableitung Lehrsätze durch anerkannte logische/mathematische Regeln



Merkmale moderner Axiomensysteme - Sprachbezogene Voraussetzungen

Sprachbezogene Anforderungen

Voraussetzungen die durch sprachliche Bedeutung der benötigten Fachausdrücke bestimmt oder deren Verwendung geregelt ist.

→ Definitionen, Begriffsanalysen und Explikationen

Sie müssen bestimmten Anforderungen entsprechen:

- Eliminierbarkeit (Jedes Definiendum theoretisch zerlegbar in dessen Definies)
- Nicht-Kreativität (Darf keine neuen Wahrheiten Erschaffen)
- Einführung in hierarchischer Reihenfolge

Merkmale moderner Axiomensysteme - Sachbezogene Voraussetzungen

Sachbezogene Anforderungen

Voraussetzungen die Sachverhalte der Theorie T als gegeben formuliert werden.

$\rightarrow$ Axiome, Axiomenschemata

Sie müssen bestimmten Anforderungen entsprechen:

- wahr
- zweifelsfrei gewiss (benötigen keinen Beweis)

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Schach

> „Ein Springer ist eine Figur, die sich in L-Form bewegt."

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Schach

> „Ein Springer ist eine Figur, die sich in L-Form bewegt."

→ sprachlich

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Schach

> „Ein Springer ist eine Figur, die sich in L-Form bewegt."

→ sprachlich

> „Der weiße Spieler beginnt die Partie"

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Schach

> „Ein Springer ist eine Figur, die sich in L-Form bewegt.“

→ sprachlich

> „Der weiße Spieler beginnt die Partie“

→ sachlich

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Mengenlehre

> „Zu zwei Mengen existiert eine Vereinigungsmenge.“

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Mengenlehre

> „Zu zwei Mengen existiert eine Vereinigungsmenge.“

$\rightarrow$ sachlich

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Mengenlehre

> „Zu zwei Mengen existiert eine Vereinigungsmenge.“

$\rightarrow$ sachlich

> „Eine Teilmenge ist eine Menge, deren Elemente alle in einer anderen Menge enthalten sind.“

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Mengenlehre

> „Zu zwei Mengen existiert eine Vereinigungsmenge."

$\rightarrow$ sachlich

> „Eine Teilmenge ist eine Menge, deren Elemente alle in einer anderen Menge enthalten sind."

$\rightarrow$ sprachlich

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Verkehrsregeln

> „Als Kreuzung bezeichnen wir den Schnittpunkt zweier Straßen."

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Verkehrsregeln

> „Als Kreuzung bezeichnen wir den Schnittpunkt zweier Straßen.“

→ sprachlich

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Verkehrsregeln

> „Als Kreuzung bezeichnen wir den Schnittpunkt zweier Straßen."

→ sprachlich

> „Rechts vor links gilt an Kreuzungen ohne Beschilderung."

Beispiel: Einordnung von Voraussetzung - Verkehrsregeln

> „Als Kreuzung bezeichnen wir den Schnittpunkt zweier Straßen."

→ sprachlich

> „Rechts vor links gilt an Kreuzungen ohne Beschilderung."

→ sachlich

Merkmale moderner Axiomensysteme - Anforderungen an Voraussetzungen

Anforderungen an die Voraussetzungen in einem Axiomensystem A:

- Unabhängigkeit
  - keine Voraussetzung (oder deren Negation) kann aus den anderen Voraussetzungen abgeleitet werden
- Vollständigkeit
  - Alle Lehrsätze aus einer Theorie T sind aus dem Axiomensystem A_T ableitbar.
- Widerspruchsfreiheit
  - Ein Satz S und seine Negation $\neg S$ können nicht beide aus A ableitbar sein.

Beispiel Axiomenschema: Logik

Voraussetzungen:

- sprachbezogen: Disjunktion: „$A \vee B$“ bedeutet: A ist wahr oder B ist wahr (oder beide sind wahr)
- sachbezogen: Wenn A wahr ist dann ist auch $A \vee B$ wahr
- Ableitung:
  - Gegeben A
  - Dann folgt $A \vee B$

Ableitungen

- Ableitungen in einem Axiomensystem dürfen nur die zugelassenen Voraussetzungen nutzen.

$\rightarrow$ Ableitungen sind rein *syntaktisches* Vorgehen

Definition ableitbar

Definition

Ein Satz heißt *ableitbar* in einem AS A, wenn es eine endliche Folge von Sätzen gibt, für die gilt:

- die Sätzen der Satzfolge
  - sind entweder Voraussetzung von A oder
  - gehen direkt bzw. indirekt aus Voraussetzungen von A durch endliche Anwendung der in A zugelassenen Ableitungsregeln hervor
- der Satz S bildet den Schlusssatz (die Konklusion) dieser Satzfolge

Eine so geartete Satzfolge heißt Ableitung von S in A

Beweise

- Allgemeiner als Ableitung
- Begründen Behauptungen in überzeugender Weise
- Beweisformen:
  - informell
    - Deutet den Gedankengang an
    - ohne richtige Ableitung
    - induktives Schließen oder Analogiebildung möglich
    - häufig für heuristische oder didaktische Zwecke
    - für Mathematik nicht geeignet

Beweise - Formell

- direkt
  - Nutzt nur definierte Voraussetzungen und Ableitungsregeln
  - Nutzt tendenziell nur notwendige Voraussetzung.
  - Schrittweiser Übergang von Voraussetzungen zur Konklusion.
- indirekt (Widerspruch)
  - Annahme der Negation der zu beweisenden Behauptung
  - Mittels Voraussetzungen einen logische Widerspruch herleiten
  - durch logischer Grundsatz vom ausgeschlossen Dritten (*tertium non datur*) ergibt sich ein Beweis der Aussage.

Beweise

- Praxis: Oft werden nur Beweisskizzen verwendet, da man darauf vertraut, sie jederzeit formalisieren zu können
- Weitere Beweisformen:
  - vollständige Induktion
  - computergestützte Beweise

Weiteres Beispiel für ein Axiomensystem

Voraussetzungen:

- sprachbezogen: „$A > B$“ bedeutet dass A größer als B ist.
- sachbezogen:
  - Irreflexivität: Kein Objekt A kann größer als sich selbst sein. (Es kann nicht $A > A$ gelten)
  - Transitivität: Wenn A größer als B und B größer als C, dann ist A auch größer als C

Lehrsatz: Es ist nicht möglich, dass $A > B$ und $A < B$ gleichzeitig gültig ist.

Weiteres Beispiel für ein Axiomensystem

Voraussetzungen:

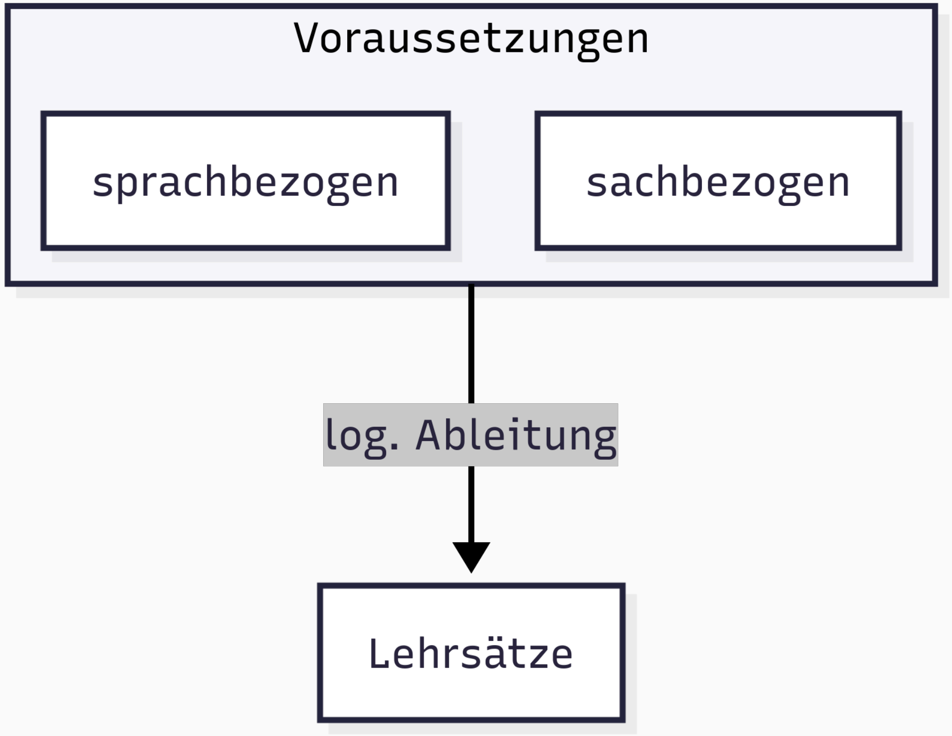
- sprachbezogen: „$A > B$“ bedeutet dass A größer als B ist.
- sachbezogen:
  - Irreflexivität: Kein Objekt A kann größer als sich selbst sein. (Es kann nicht $A > A$ gelten)
  - Transitivität: Wenn A größer als B und B größer als C, dann ist A auch größer als C

Lehrsatz: Es ist nicht möglich, dass $A > B$ und $A < B$ gleichzeitig gültig ist.

Beweis: Angenommen es gilt $A > B$ und $A < B$ dann muss durch die Transitivität auch $A > A$ gelten. Das widerspricht der Irreflexivität

Zusammenfassung axiomatische Methode

- Theorien werden systematisch dargestellt durch ein Axiomensystem
- Nur Wissen innerhalb des Systems wird genutzt
- Dient der Nachvollziehbarkeit



Fragen zu Axiomatik

Frage

Ist die axiomatische Methode perfekt?

Fragen zu Axiomatik

> Frage
>
> Ist die axiomatische Methode perfekt?

- Ist die Logik fehlerfrei?
  - bis 19. Jhd. Syllogistik $\rightarrow$ Unzureichend da keine Beziehung zwischen Objekten dargestellt werden können
  - Wird ersetzt durch Prädikatenlogik
- Voraussetzungen
  - Wahrheitsbezug
  - Unabhängigkeit
  - Vollständigkeit
  - Widerspruchsfreiheit

Der Wandel des Wahrheitsbegriffs

- Wahrheit / Gewissheit der Voraussetzungen müssen gewährleistet sein.
- Daraus wird Wahrheit / Gewissheit des Lehrsatzes abgeleitet.

Wahrheitsanspruch - Aristoteles

- Verlangt für Beweise wahre Voraussetzungen:
  - Realdefinitionen
  - zweifelsfrei wahre Axiomen
  - fachspezifische Hypothesen

Wahrheitsanspruch - Aristoteles

Frage

Wie erkennt man diese Voraussetzungen

Wahrheitsanspruch - Aristoteles

Frage

Wie erkennt man diese Voraussetzungen

- *Noûs*: Menschliche Intuition mit der Definitionen, Axiome und Hypothesen erkannt werden.

Wahrheitsanspruch - Menschliche Intuition

Sind diese Aussagen wahr?

- „Parallelen schneiden sich nicht“
- „Das Ganze ist größer als der Teil“
- „Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°“

Wahrheitsanspruch - Problem

Problem: Die Menschliche Intuition kann sich Irren.

- „Parallelen schneiden sich nicht“ (Aristoteles)
  - In nicht-euklidischen Geometrie stimmt das nicht mehr
- „Das Ganze ist größer als der Teil“ (Euklid)
  - Im Unendlichen nicht mehr richtig -> Ganze Zahlen und Natürliche Zahlen sind gleich viel
- „Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°“ (Descartes)
  - Auch hier nicht-euklidische Geometrie

Wahrheitsanspruch - Nominaldefinition

- 17. Jahrhundert
- Durch Einfluss von Blaise Pascal
- Von Aristoteles als irreführend verworfen

> Zuordnung eines frei gewählten, aber in allen Kontexten gleich bleibendes Worts (*Definiendum*) zu einer Beschreibung eines Sachverhalts (*Definiens*)

→ Keine sachbezogene Feststellung, sondern ausschließlich eine sprachbezogene Zuordnung

Problem:

- Werden die Norminaldefinitionen verwendet, wird der Wahrheitsanspruch für Axiome aufgegeben.

→ Das Axiomensystem verliert den Wahrheitsanspruch und gilt nur noch *hypothetisch*.

Wahrheitsanspruch - Unterscheidung kategorische und hypothetische AS

Kategorisches Axiomensystem

- Voraussetzungen werden als wahr angenommen.

Hypothetisches Axiomensystem

- Realdefinitionen von Grundbegriffen durch Norminaldefinitionen ersetzt
- Angeblich wahre Axiome durch hypothetisch geltende Grundannahmen ersetzt

Hilberts Auffassung der Axiomatik

- 1899 in „Grundlagen der Geometrie“
- Nach Euklid sind Punkte, Geraden und Ebenen inhaltlich bestimmt.
- Bei Hilbert sind es Systeme von „Dingen“
  - Punkte
  - Geraden
  - Ebenen
- Axiome beschreiben gegenseite Beziehungen zwischen „Dingen“

Hilberts Axiomatik - Beispiel

- Drei *Punkte* im Raum spannen eine *Ebene* auf.

stattdessen auch möglich:

Hilberts Axiomatik - Beispiel

- Drei *Punkte* im Raum spannen eine *Ebene* auf.

stattdessen auch möglich:

- Drei *Bananenbrote* im Raum spannen eine *Tulpe* auf.

Vergleich zu bisheriger Axiomatik

- Gegenstände haben keine explizite Definitionen $\rightarrow$ Objekte inhaltlich unbestimmt
  - Begriffe egal, statt Punkte, Gerade, Ebene könnte man auch Bananenbrot, Wissenschaftstheorie und Tulpe sprechen.
- Implizite Definition: Dinge werden charakterisiert durch das Beziehungsgeflecht zu anderen Dingen
- Reduzierung der Anzahl der Voraussetzungsarten: Es gibt nur noch Axiome.
  - Entsprechen gleichzeitig Definitionen

Vergleich zu bisheriger Axiomatik

- Gegenstände haben keine explizite Definitionen $\rightarrow$ Objekte inhaltlich unbestimmt
  - Begriffe egal, statt Punkte, Gerade, Ebene könnte man auch Bananenbrot, Wissenschaftstheorie und Tulpe sprechen.
- Implizite Definition: Dinge werden charakterisiert durch das Beziehungsgeflecht zu anderen Dingen
- Reduzierung der Anzahl der Voraussetzungsarten: Es gibt nur noch Axiome.
  - Entsprechen gleichzeitig Definitionen

Definition

Ein Axiomensystem A, dessen Gegenstände nicht explizit definiert, sondern nur implizit durch die Axiome von A bestimmt sind und das die Form eines Kalküls aufweist, heißt *formales Axiomensystem*

Formale Axiomatik - Folgen

Vorteile:

- vielseitig anwendbar
  - auch anwendbar auf strukturell gleichartige Gegenstandsbereiche
  - $\rightarrow$ Dadurch starke Verbreitung des Formalismus

Gegenstände und Ergebnisse formaler Systeme

- Im Formalismus stellt sich die Frage nach der besonderen Seinsart der mathematischen Gegenstände nicht mehr, sie sind bloße Bestandteile, Knotenpunkte eines abstrakten Beziehungsgeflechts, durch Axiome näher bestimmt.
- Mathematik $\rightarrow$ Formal- / Strukturwissenschaft
- *Relative Geltung* der Lehrsätze $\rightarrow$ Abhängig von Axiomen

Auch die Unabhängigkeit zwischen den Vorausetzungen ist nicht einfach möglich.

Definition

Die Voraussetzungen eines Axiomensystems A sind genau dann unabhängig voneinander, wenn sich keine Voraussetzung von A noch ihre Negation aus den restlichen Voraussetzungen von A ableiten lässt.

Problem

Es ist nicht einfach die Unabhängigkeit von Voraussetzungen zu erkennen.

Vollständigkeit & Entscheidbarkeit

Definitionen

Vollständigkeit: Wird eine Theorie T in dem Axiomensystem A_T dargestellt, dann heißt A_T genau dann (semantisch) vollständig, wenn alle Lehrsätze von T in A_T ableitbar sind.

Entscheidbarkeit: Ein Axiomensystem A heißt genau dann entscheidbar, wenn sich für jeden Satz S, der in A formulierbar ist, feststellen lässt, ob S oder seine Negation $\neg S$ in A ableitbar ist.

Zweck

Wenn sich ein Satz S in einem Axiomensystem A formulieren lässt möchte man wissen ob er auch in A ableitbar ist.

Vollständigkeit & Entscheidbarkeit

Problem

Kurt Gödel hat als Ergebnis bei Forschungen über die Prädikatenlogik, die Mengenlehre von Zermoelo und Fraenkel den *Unvollständigkeitssatz* formuliert.

Schon in Systemen, der Komplexität der Arithmetik, stellt er fest: Es gibt Sätze die in dem System gültig aber nicht ableitbar sind.

→ Wahrheit entspricht nicht mehr Beweisbarkeit

→ Ein widerspruchsfreies System dieser Art ist nicht (semantisch) vollständig.

Zudem entdeckt Gödel, dass es Aussagen gibt, die unentscheidbar sind.

Die Axiomatische Methode - Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Wahrheit der Voraussetzungen ist schwer zu beweisen
- Abschwächung des Wahrheitsbegriffs
  - Nominaldefinition
  - Formale Axiomatik
- Unabhängigkeit der Voraussetzungen nicht eindeutig erkennbar
- Vollständigkeit und Entscheidbarkeit durch Gödel widerlegt

$\rightarrow$ Trotz der durch Gödel aufgezeigten Grenzen bleibt die Axiomatik die nützlichste Methode zur Systematisierung mathematischer Theorien.

Vielen Dank

Haben Sie noch Fragen?